مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۸۸–۱۰۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.50285.2395

مدل‌بندی قیمت دارایی با استفاده از فرآیند CGMY تعمیم‌یافته با محرک تغییرات مرتبه اول

نویده مدرسی [(۱)] [۱]، پارسا یحیوی [(۱)]، رضا کاظمی [(۱)]، سمانه کاظمی [(۱)] و علیرضا موسوی [(۱)]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران

دبیر مسئول: فیروزه ریواز

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۲۰

چکیده: در مدل‌سازی‌های کلاسیک قیمت مشتقات مالی، تاکنون برخی از ویژگی‌های مهم مسیرهای فرآیند قیمت دارایی پایه نادیده گرفته شده‌اند. در این مدل‌ها، سه جنبه اساسی حرکت تصادفی یعنی سرعت، مقیاس و درجه پیوستگی قابل تشخیص نیستند. این ویژگی‌ها بخصوص در مدل‌هایی که در آنها محرک، حرکت براونی است قابل تفکیک نیستند، در حالی‌که این مفاهیم برای تحلیل دقیق نحوه حرکت قیمت دارایی‌ها ضروری‌اند. در جهت رفع این محدودیت، فرض پیوستگی مسیرهای فرآیند را کنار گذاشته و از تقریب‌های ناپیوسته استفاده می‌کنیم که امکان تمایز این سه جنبه را فراهم می‌سازند. در این راستا، فرایند تعمیم‌یافته C^sGMY را بکار می‌بریم. فرآیندی که در آن پارامتر C بیانگر سرعت است و به صورت تصادفی مدل‌سازی می‌شود. با رویکردی جدید تغییرات مرتبه اول را به عنوان محرک مدل در نظر می‌گیریم که امکان مدل کردن تلاطم تلاطم تصادفی را فراهم می‌کند. در ادامه پارامترهای مدل معرفی‌شده را در یک ساختار دو مرحله‌ای برآورد می‌کنیم. مرحله اول، شامل برآورد پارامترهای فرآیند CGMY به کمک تابع مشخصه این فرآیند و مرحله دوم برآورد پارامترهای ایجاد شده در مسیر ساخت فرایند C^sGMY است. پس از تعیین پارامترها، مسیرهای نمونه‌ای متناظر با فرآیند جدید را شبیه‌سازی و با فرآیند اولیه مقایسه می‌کنیم. شبیه‌سازی فرآیند C^sGMY را به کمک روش تخمین پرش‌های بزرگ انجام می‌دهیم. در این روش نرخ وقوع پرش‌های بزرگ توسط یک فرآیند پواسون مدل می‌شود و اندازه این پرش‌ها دارای توزیع نمایی است. در نهایت با استفاده از آزمون ARCH، وجود تلاطم تلاطم تصادفی در داده‌های تاریخی قیمت و فرآیند جدید را تایید می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فرآیند لوی CGMY، تلاطم تلاطم تصادفی، سرعت تصادفی.

رده‌بندی ریاضی: 60G51, 60J65, 60G22

[۱] نویسنده مسئول مقاله , n.modarresi@atu.ac.ir (N.Modarresi) , p_yahyavi@atu.ac.ir (P.Yahyavi) , (R.Kazemi) , rkazemi453@gmail.com , S.kazemi40@atu.ac.ir (S.kazemi) , Ar.mousavie@gmail.com (A.Mousavi) ,

۱ مقدمه

تلاطم یکی از مهمترین مفاهیم در مدل‌سازی مالی است که نقش کلیدی در درک رفتار بازارهای مالی ایفا می‌کند. مدل‌سازی نسبتاً دقیق تلاطم، و وارد کردن آن به مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی‌های پایه از اهمیت فراوانی برخوردار است. این امر تاثیر غیرقابل انکاری در دقت قیمت‌گذاری مشتقات مالی دارد.

از پیشگامان مدلسازی قیمت مشتقات مالی می‌توان به بلک و شولز [۶] اشاره کرد. مدل بلک شولز یکی از مهم‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار است که در آن تلاطم دارایی پایه ثابت فرض می‌شود. تحقیقات نشان دادند که با توجه به داده‌های تجربی مستخرج از بازارهای مالی، تلاطم دارایی پایه ثابت نیست [۱۸] و [۲۹]. با وجود رد فرض ثابت بودن تلاطم، مدل بلک شولز به علت سادگی همواره محبوبیت فراوانی میان معامله‌کنندگان بازار دارد [۳۱]. بر مبنای داده‌های تجربی قیمت مشتقات مالی، تلاطم یک متغیر تصادفی است [۲]. با توجه به این واقعیت و در جهت بهبود مدل بلک–شولز، مدل‌هایی معرفی شدند که در آنها از یک فرآیند تصادفی برای مدل کردن تلاطم استفاده شده است. از اولین این مدل‌ها می‌توان به مدل هال–وایت [۲۳] اشاره کرد. هال و وایت تلاطم تصادفی را از طریق یک فرآیند حرکت براونی هندسی [۲] مدل کردند. در این مدل بازده و تلاطم مستقل فرض شده‌اند و اثر اهرمی [۱۱] نادیده گرفته شده است. از شناخته شده‌ترین ویژگی‌های تلاطم قیمت دارایی پایه مشتقات مالی، به ویژه سهام، می‌توان به اثر اهرمی اشاره کرد. بنابر ویژگی اثر اهرمی، قیمت سهم به عنوان یک متغیر تصادفی، با تلاطم آن رابطه عکس دارد و افزایش یکی منجر به کاهش دیگری می‌شود و بالعکس. هستون با در نظر گرفتن اثر اهرمی، مدلی کارآمد برای قیمت‌گذاری اختیار معرفی کرد [۲۱]. مدل هستون، از دو معادله دیفرانسیل تصادفی تشکیل شده است که به‌طور همزمان تغییرات قیمت دارایی و تلاطم آن را به ترتیب توسط فرآیند انتشار و فرآیند اورنشتاین–اولنبک [۳] مدل‌سازی می‌کنند. اشتین–اشتین [۳۰] از فرآیند اورنشتاین–اولنبک و مهردوست و صابر [۱] از مدل هستون مضاعف و دو فرآیند اورنشتاین–اولنبک همبسته برای مدلسازی تلاطم تصادفی استفاده کردند. یکی از ویژگی‌های کلیدی مدل هستون، ویژگی بازگشت به میانگین در تلاطم تصادفی است که به آن اجازه می‌دهد تا رفتارهای پیچیده بازار، مانند لبخند تلاطم را به‌خوبی توضیح دهد [۲۸]. ویژگی بازگشت به میانگین، به تمایل تلاطم قیمت به بازگشت به یک سطح میانگین مشخص و عدم تمایل تلاطم به انحراف از این سطح اشاره می‌کند که در داده‌های واقعی بازار سهام قابل مشاهده است.

مدل‌های تلاطم موضعی در کنار مدل‌های تلاطم تصادفی توسعه داده شدند [۱۵] و [۱۴]. در این مدل‌ها تلاطم به عنوان تابعی از زمان و قیمت دارایی پایه اختیار مطرح می‌شود. با توجه به اینکه مدل‌های تلاطم موضعی از دینامیک جداگانه برای مدل‌سازی تلاطم استفاده نمی‌کنند، سرعت محاسبات قیمت اختیار را افزایش می‌دهند. مدل تلاطم موضعی، با وجود دقت فراوان در قیمت‌گذاری اختیار با سررسیدهای کوتاه مدت، در مدل‌کردن اثر اهرمی ناتوان است [۲۰]. همچنین از آنجایی که مدل‌های تلاطم محلی بر اساس داده‌های روزانه کالیبره می‌شوند، برای پیش‌بینی رفتار آینده تلاطم و مدیریت ریسک مناسب نیستند [۸]. در راستای بهره‌برداری از مزایای هر دو مدل تلاطم تصادفی و تلاطم محلی مدل‌های ترکیبی معرفی شده و توسعه یافتند [۲۵].

محرک تصادفی تلاطم باید با توجه به ویژگی‌ها و واقعیت‌هایی که از داده‌های تاریخی تلاطم بدست می‌آید انتخاب شود. در مدل‌های قبلی معرفی شده، محرک تصادفی، تلاطم فرآیند حرکت براونی فرض می‌شود. تلاطم دارای ویژگی خوشه‌ای است یعنی افزایش یا کاهش تلاطم در یک لحظه منجر به افزایش یا کاهش آن در بازه‌ای از زمان و تشکیل یک خوشه می‌شود [۱۲]. مدل‌های تلاطم ناهموار [۴] با هدف وارد کردن اثر خوشه‌ای به مدل تلاطم تصادفی معرفی شدند [۱۹]. از ویژگی‌های اصلی این مدل‌ها استفاده از حرکت براونی کسری [۵] به عنوان محرک تصادفی برای تلاطم است. در این مدل‌ها سعی شده با استفاده از حرکت براونی کسری ویژگی خوشه‌ای تلاطم به خوبی مدل شود و رفتار مدل به داده‌های واقعی تلاطم نزدیک‌تر شود.

با معرفی شاخص تلاطم VIX در سپتامبر ۲۰۰۳ اهمیت مدل کردن تلاطم در قیمت‌گذاری اختیار بطور چشم‌گیری افزایش یافت. شاخص VIX پیش‌بینی‌ای ریسک خنثی از تلاطم شاخص S&P500 برای ۳۰ روز آینده است. خرید و فروش این شاخص منجر به توسعه مشتقات مالی‌ای شد که دارایی پایه آنها تلاطم بود. از این رو پرداختن به تلاطم تلاطم که در مدل‌های قبلی ثابت فرض می‌شد، در مدل‌سازی قیمت این مشتقات اهمیت بیشتری یافت [۲۲].

برندورف و وراآرت در پژوهش خود [۵]، چند گام اساسی در مسیر اصلاح مدل تلاطم برداشتند. روش آنها جهت نشاندن اثر خوشه‌ای در مدل، استفاده از فرآیند اورنشتاین–اولنبک با محرک لوی تعدیل کننده بود [۳] و [۴]. آنها فرض وجود تلاطم تلاطم تصادفی را از طریق تصادفی کردن تلاطم در محرک لوی تعدیل کننده فرآیند اورنشتاین–اولنبک اعمال کردند. سه روش برای انجام این کار وجود دارد، استفاده از یک فرآیند تلاطم مجزا با محرک لوی تعدیل کننده، زمان تصادفی کردن فرآیند لوی تعدیل کننده و یا ترکیب هر دو روش. در مقاله حاضر با توجه به ویژگی‌های حرکتی یک فرآیند تصادفی، سعی می‌کنیم تا روشی دقیق‌تر برای مدل‌سازی تلاطم تلاطم تصادفی ارائه دهیم.

مسیر حرکت یک فرآیند دارای سرعت، مقیاس و درجه پیوستگی است که در حوزه مالی توجه کمتری به آن شده است. عدم توانایی حرکت براونی در ایجاد تمایز بین پارامتر های مهم در مدل مانند سرعت، مقیاس و درجه پیوستگی حرکت از نواقص این فرآیند در نقش محرک تصادفی قیمت به شمار می‌آیند. همچنین فرآیند حرکت براونی، به دلیل پیوستگی مسیرها، با واقعیت‌ها و مشاهدات بازار همچون وجود عدم

---

[۲] Geometric Brownian motion

[۳] Ornstein-Uhlenbeck

[۴] Rough volatility

[۵] Fractional Brownian motion

پیوستگی در سری‌های زمانی مالی و وجود پرش در بازار در تضاد است. پژوهشگران بسیاری در جهت رفع این نواقص از فرآیندهای لوی پیشرفته‌تر برای مدل کردن قیمت استفاده کرده‌اند [۱۰]، [۲۴] و [۱۶]. این فرآیندها با اصلاح محرک تصادفی مدل، واقعیت‌های بیشتری از بازارهای مالی مانند وجود ناپیوستگی و پرش‌ها را پوشش دادند. از جمله این فرآیندها می‌توان به فرآیند CGMY که نوعی فرآیند لوی است اشاره کرد که در مقاله کار و همکاران معرفی شده است [۹]. فرآیندهایی نظیر CGMY، با بهره‌گیری از تقریب‌های ناپیوسته از مسیر فرآیند، امکانات بیشتری برای بررسی عواملی مانند سرعت، مقیاس و درجه پیوستگی فراهم می‌کنند، عواملی که در مدل‌های پیوسته قابل نمایش نیستند.

تلاطم یک مدل قیمت‌گذاری، بطور مستقیم با مسیر و نحوه حرکت فرآیندهای تصادفی به‌کاررفته در این مدل در ارتباط است. بنابراین تمام ویژگی‌های حرکت یک فرآیند تصادفی بر تلاطم مدل و تغییرات آن تاثیرگذار خواهد بود. با توجه به ویژگی‌های برشمرده شده از حرکت یک فرآیند، منشا تغییرات در تلاطم می‌تواند تغییر در مقیاس یا سرعت فرآیند باشد. فرض کنیم فرآیند تصادفی دلخواه $L = (L(t), t \geq 0)$ و پارامتر تعینی $c > 1$، موجود باشند و فرآیند تسریع شده و تغییر مقیاس داده شده را به ترتیب با $Y_c(t) = L(ct)$ و $Z_c(t) = \sqrt{c}L(t)$ نشان دهیم. اگر L فرآیند حرکت براونی باشد آنگاه این دو فرآیند در توزیع باهم برابرند. این برابری تشخیص منشا تغییرات تصادفی تلاطم یا محرک تصادفی تلاطم تلاطم را غیر ممکن می‌کند. بنابراین با استفاده از جایگزینی مناسب برای حرکت براونی این نارسایی را رفع می‌کنیم. حرکت براونی فرآیندی با مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است و به همین دلیل بسیاری از اطلاعات را نادیده می‌گیرد. از دست رفتن اطلاعات، ناشی از تغییرات مرتبه اول نامتناهی و تغییرات مرتبه دوم ثابت و غیر تصادفی مسیرهای حرکت براونی است. با وجود این ویژگی‌های مسیر فرآیند حرکت براونی، تشخیص جهت تغییر مسیر، سرعت، مقیاس و درجه پیوستگی غیر ممکن است. استفاده از فرآیندهای تصادفی پرش محض به عنوان تقریب ناپیوسته از حرکت براونی یکی از راه حل‌های موجود برای مشکلات اشاره شده است. این فرآیندها مسیرهای حرکت ناپیوسته دارند که با واقعیت قیمت دارایی‌های مالی درطول زمان مطابقت بیشتری دارند. همچنین عدم پیوستگی مسیرها، امکان کنترل تغییرات کل و تغییرات درجه دوم فرآیند را فراهم می‌کند که در مدل کردن تلاطم و تلاطم تلاطم بسیار حائز اهمیت هستند.

از جمله مهم‌ترین تقریب‌های ناپیوسته جایگزین حرکت براونی در مدل‌های قیمت‌گذاری، خانواده‌ای از فرآیندهای لوی هستند. فرآیندهای لوی دارای نموهای مستقل‌اند و کلاس وسیعی از فرآیندهای تصادفی را تشکیل می‌دهند که مسیرهای نمونه‌ای آنها می‌توانند پیوسته، پیوسته با ناپیوستگی‌های گاه به گاه، و کاملاً ناپیوسته یا پرش محض باشند. تمام فرآیندهای لوی به جز حرکت براونی، دارای مسیرهای ناپیوسته و پرش هستند.

در این مقاله با استفاده از تغییرات منبع تصادفی مدل قیمت گذاری، منبع تصادفی لازم برای اعمال فرض تلاطم و تلاطم تلاطم تصادفی در مدل را بدست می‌آوریم. با استفاده از این روش، نیاز به استفاده از منابع تصادفی متعدد و مستقل برای اعمال فرض تلاطم تصادفی که در مدل‌های پیشین از جمله مدل هستون، مدل‌های تلاطم تصادفی لوی [۶] و یا مدل‌های لوی زمان متغیر [۷] وجود دارد از بین می‌رود و از پیچیدگی مدل کاسته می‌شود. همچنین مدل‌های پیشین با کنار گذاشتن فرض تلاطم تلاطم تصادفی و یا ثابت در نظر گرفتن آن، تاثیر این عامل را در قیمت‌گذاری مشتقات نادیده گرفتند که در مدل معرفی شده این نواقص بر طرف شده است. در پژوهش حاضر با کمک فرآیند لوی CGMY و ویژگی‌های آن که انعطاف پذیری بیشتری در مورد مسیرهای نمونه‌ای بدست می‌دهند، تلاش می‌کنیم محرک مدل تصادفی قیمت را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که تلاطم و تلاطم تلاطم تصادفی را پوشش داده و به واقعیت بازار نزدیک‌تر شود. چهار پارامتر اصلی این فرآیند عبارتند از C، کنترل کننده سرعت فرآیند، G، نرخ تعدیل پرش‌های رو به پایین، M، نرخ تعدیل پرش‌های رو به بالا و Y تعیین کننده درجه پیوستگی مسیر. پارامتر Y در این فرآیند با کنترل درجه پیوستگی مسیرها، امکان دستیابی به تقریب ناپیوسته جایگزین مسیرهای پیوسته فرآیند حرکت براونی را فراهم می‌کند.

در مجموع پارامترهای فرایند CGMY آن را قادر می‌سازند تا با داده‌های واقعی مالی تطبیق بیشتری داشته باشد. این فرآیند می‌تواند پدیده‌های مختلفی مانند خوشه‌بندی تلاطم، پرش‌ها و توزیع‌های بازده غیرنرمال را بهتر مدل‌سازی کند اما همچنان تلاطم تلاطم در این فرآیند ثابت است. در میان عوامل موثر بر مسیرهای یک فرآیند تصادفی که تلاطم و تلاطم تلاطم آن را کنترل می‌کنند، سرعت نقش بسیار چشمگیری بازی می‌کند [۲۷]. پارامتر C در فرایند CGMY، علاوه بر سرعت، شدت جهش‌ها را نیز کنترل می‌کند و از این طریق بر تعداد دفعات وقوع جهش‌ها در فرآیند قیمت تأثیر می‌گذارد. هرچه مقدار پارامتر C در یک بازه زمانی معین بیشتر باشد، پرش‌های مسیر در این بازه بیشتر و در نتیجه مسیر طی شده توسط فرآیند طولانی‌تر است. و بطور مشابه هرچه پارامتر C کمتر باشد، مسیر طی شده توسط فرآیند در یک بازه زمانی یکسان کمتر خواهد بود. در یک بازه زمانی یکسان، افزایش یا کاهش مسیر طی شده توسط فرآیند تصادفی به افزایش یا کاهش سرعت آن تفسیر می‌شود، بنابراین پارامتر C می‌تواند از این طریق سرعت را مدل کند.

در این مقاله با هدف مدل کردن تلاطم تلاطم تصادفی، پارامتر C در فرآیند CGMY را تصادفی فرض می‌کنیم و فرآیند C^sGMY را معرفی می‌کنیم. در این راستا از تغییرات مرتبه اول یک فرآیند CGMY ساده استفاده می‌کنیم تا به کمک آن محرک تصادفی مورد نیاز برای تصادفی کردن پارامتر C را تعریف کنیم. سپس به وسیله این فرآیند تعمیم یافته، مدلی از نوع نمایی لوی برای قیمت دارایی پایه مشتقات مالی ارائه می‌کنیم که تاثیر تلاطم تلاطم تصادفی در آن پوشش داده شده است.

مقاله حاضر در چهار بخش به صورت زیر تهیه و تنظیم شده است. در بخش دوم به بیان نظری تعاریف و مفاهیم پایه می‌پردازیم. همچنین فرآیند C^sGMY را در این فصل معرفی می‌کنیم. مدل دارایی نمایی لوی متناظر با فرآیند تعمیم یافته در بخش سوم مطرح می‌شود.

---

[۶] Stochactic volatility Levy

[۷] Time-changed Levy

در نهایت در بخش چهارم به بررسی مسیرهای فرآیند معرفی شده برای قیمت‌گذاری دارایی پایه می‌پردازیم. در این بخش، ابتدا، به برآورد پارامترهای فرآیند CGMY ساده از طریق تابع مشخصه این فرآیند می‌پردازیم و سپس به کمک این پارامترها و تابع زیان مربعات پارامترهای فرآیند C^sGMY را بدست می‌آوریم. پس از تعیین پارامترهای متناظر با فرآیند جدید، برای شبیه‌سازی مسیرهای فرآیند C^sGMY، از روش تخمین پرش‌های بزرگ استفاده می‌کنیم. مقایسه مسیرهای مدل متناظر با فرآیند C^sGMY با مدل متناظر با فرآیند CGMY ساده، تاثیر تلاطم تلاطم تصادفی را به خوبی تصویر می‌کند. همچنین در این بخش با کمک آزمون ARCH وجود تلاطم تلاطم تصادفی در مدل جدید را تایید خواهیم کرد. علاوه بر این با تعریف شاخصی بر مبنای صدک‌های دم توزیع فرآیندهای C^sGMY و CGMY به مقایسه سرعت زوال این دم‌ها می‌پردازیم و برای اطمینان از عدم تصادفی بودن نتایج در این بخش از روش بوت استرپ استفاده می‌کنیم.

۲ تلاطم تلاطم تصادفی

با توجه به اهمیت نقش تلاطم تلاطم در مدل‌سازی قیمت دارایی‌های ریسکی که در بخش قبل به آن اشاره شد، در این بخش به بیان نظری تعاریف پایه و مدل توصیف شده می‌پردازیم. فرآیند CGMY به عنوان فرآیندی تصادفی با تلاطم تلاطم ثابت در مدل‌سازی تلاطم تلاطم تصادفی ناتوان است. این ویژگی تطابق واقعیت بازار با فرآیند CGMY به عنوان منبع تصادف مدل را کاهش می‌دهد. با معرفی فرآیند CGMY تعمیم یافته، تلاطم تلاطم فرآیند تصادفی جدید دیگر ثابت نیست و تصادفی خواهد شد.

۱.۲ مشخصات فرآیندهای لوی و تغییرات مرتبه اول

فرآیند لوی $\{L_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی کدلگ [۸] بر فضای $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است که $L_0 = 0$ و مقادیر خود را در $\mathbb{R}$ اختیار می‌کند. فرآیند $\{L_t\}_{t\geq 0}$ دارای نموهای مستقل و ایستا است و مسیرهای نمونه‌ای آن در احتمال پیوسته هستند. فرآیندهای لوی به واسطه انعطاف پذیری بالایی که در مدل کردن حقایق موجود در بازارهای مالی دارند نقشی مهم و گسترده در این حوزه ایفا می‌کنند. از آنجایی که به دلیل وجود پرش‌ها در قیمت دارایی‌ها توزیع بازده آنها دارای عدم تقارن، چولگی و کشیدگی است، حرکت براونی به عنوان محرک دینامیک تصادفی قیمت دارایی عملکرد مطلوبی از خود نشان نمی‌دهد.
اگر $\{L_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند لوی باشد آنگاه به ازای هر t توزیع $\{L_t\}_{t\geq 0}$ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر است. توزیع احتمال F بر $\mathbb{R}$ را بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ موجود باشند بطوریکه جمع آنها دارای توزیع F باشد [۱۳]. بنابر این ویژگی فرآیندهای لوی، تابع مشخصه $\phi_{L_t}(z)$ را می‌توان بر حسب نمای مشخصه [۹] $\psi_{L_t}(z)$ در هر زمان t به صورت زیر محاسبه کرد

$$\phi_{L_t}(z) = e^{\psi_{L_t}(z)} = \phi_{tL_1}(z).$$

هر فرآیند لوی اندازه‌ای القا می‌کند که، میانگین تعداد پرش‌های مسیرهای نمونه‌ای فرآیند را در هر واحد از زمان اندازه می‌گیرد که اندازه پرش‌ها متعلق به یک مجموعه بورل اندازه‌پذیر است و به آن اندازه لوی می‌گویند. به ازای هر مجموعه بورل اندازه‌پذیر $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ اندازه لوی $\nu(A)$ القا شده توسط فرآیند لوی $\{L_t\}_{t\geq 0}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nu(A) = \mathbb{E}\left[\#\left\{t \in [0,1] : \Delta L_t \neq 0, \Delta L_t \in A\right\}\right]. \tag{۱.۲}$$

قضیه نمایش لوی–خینچین [۱۰] ارتباط بین تابع مشخصه $\phi_{L_t}(z)$ و نمای مشخصه $\psi_{L_t}(z)$ یک فرآیند لوی با سه تایی مشخصه متناظر آن یعنی (A, ν, γ) را به صورت زیر بیان می‌کند

$$\phi_{L_t}(z) = E\left[e^{izL_t}\right] = e^{t\psi(z)}, \tag{۲.۲}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}zAz + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{(izx)} - 1 - izx1_{|x|<1}\right)\nu(dx). \tag{۳.۲}$$

اگر اندازه لوی ν تحت اندازه لبگ پیوسته باشد، آنگاه می‌توان این اندازه را به کمک چگالی لوی [۱۱] $k(x)$ به صورت زیر تعریف کرد

$$\nu(dx) = k(x)dx. \tag{۴.۲}$$

---

[۸] Cadlag
[۹] Characteristic exponent
[۱۰] Levy-Kintchine representation
[۱۱] Lévy density

چگالی لوی، نرخ وقوع پرش‌هایی از اندازه dx را در مسیرهای نمونه‌ای فرآیند لوی اندازه‌گیری می‌کند. فرآیند تصادفی پواسون مرکب $\{X_t\}_{t\geq 0}$ با پارامتر شدت $\lambda \geq 0$ و توزیع اندازه پرش F به صورت

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_t, \tag{۵.۲}$$

تعریف می‌شود که در آن Y_i ها فرآیندهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F و N_t فرآیند پواسون با شدت $\lambda \geq 0$ و مستقل از $(Y_i)_{i\geq 1}$ است. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند پواسون مرکب است اگر و تنها اگر یک فرآیند لوی با مسیرهای نمونه‌ای متشکل از توابع قطعه‌ای ثابت باشد. با توجه به تعریف اندازه لوی که به شمارش یک رویداد تصادفی در طول زمان می‌پردازد بر مبنای این تعریف هر فرآیند تصادفی پواسون مرکب مانند $\{X_t\}_{t\geq 0}$ را بر مبنای اندازه لوی به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$X_t = \sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} x J_X\left(ds \times dx\right), \tag{۶.۲}$$

که در آن $J_X\left(B\right)$، $B \in [0,\infty)\times\mathbb{R}$ اندازه القایی فرآیند پواسون مرکب $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ، اندازه تصادفی پواسون و یا اندازه پرش است که به ازای هر مجموعه اندازه‌پذیر $B \in [0,\infty)\times\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$J_X\left(B\right) = \#\{(t, X_t - X_{t-}) \in B\}.$$

اندازه $J_X\left([t_1,t_2], A\right)$ تعداد پرش‌های فرآیند $\{X_t\}_{t\geq 0}$ در بازه زمانی $[t_1,t_2]$ که بزرگی آنها در مجموعه A باشد را اندازه می‌گیرد. اندازه شدت [۱۲] اندازه تصادفی پواسون بر مبنای اندازه لوی $\nu\left(A\right)$ به صورت

$$\mu\left(ds\times dx\right) := \nu\left(dx\right)dt = \lambda f\left(dx\right)dt, \tag{۷.۲}$$

تعریف می‌شود. اگر $\{L_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند لوی دلخواه با تغییرات متناهی باشد، تغییرات مرتبه اول آن را به کمک اندازه شدت $\mu\left(ds\times dx\right)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V_L\left(t\right) := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |x| \mu_L\left(ds\times dx\right). \tag{۸.۲}$$

بنابر تعریف $\{V_L\left(t\right)\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند لوی صعودی است. در زیر بخش بعدی از طریق این فرآیند، محرک مناسبی برای تصادفی کردن پارامتر C در فرآیند CGMY بدست می‌آوریم.

۲.۲ فرآیند C^sGMY

فرآیند تصادفی CGMY یک فرآیند لوی از خانواده فرآیندهای پایدار تعدیل‌شده [۱۳] است. مسیرهای نمونه‌ای فرآیندهای تصادفی این خانواده دارای پرش هستند اما توزیع بزرگای این پرش‌ها بصورت نمایی کاهش می‌یابند. در نتیجه این تعدیل توزیع، فرآیند در هر t دمی پهن‌تر از توزیع نرمال و نازک‌تر از توزیع فرآیندهای آلفا پایدار دارد. چگالی لوی فرآیندهای پایدار تعدیل‌شده به صورت

$$k\left(x\right) = \frac{c_-}{|x|^{(1+\alpha)}} e^{-\lambda_-|x|} 1_{x<0} + \frac{c_+}{x^{(1+\alpha)}} e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0}, \tag{۹.۲}$$

تعریف می‌شود که در آن $c_-, c_+, \lambda_-, \lambda_+ > 0$، $\alpha < 2$ و 1 تابع نشانگر است. در حالت خاص چگالی لوی فرآیند CGMY

$$k\left(x\right) = \frac{C}{|x|^{(1+Y)}} e^{-G|x|} 1_{x<0} + \frac{C}{x^{(1+Y)}} e^{-Mx} 1_{x>0}, \tag{۱۰.۲}$$

است. فرآیند CGMY دارای چهار پارامتر C، G، M و Y است. پارامترهای G و M به ترتیب نرخ کاهش نمایی سمت راست و چپ دم چگالی لوی را کنترل می‌کنند و در صورتی که $G \neq M$ توزیع دارای چولگی است.

[۱۲] Intensity measure
[۱۳] Tempered stable processes

پارامتر Y نرخ پیوستگی فرآیند را نشان می‌دهد. نرخ پیوستگی فرآیند، نرخ وقوع حرکت‌های با اندازه کوچک پیش از رسیدن به حرکت‌هایی با اندازه بزرگ را کنترل می‌کند. اگر $a > ۰$ و $(۱ + \lambda)\, a > ۰$ به ترتیب بزرگای حرکت‌های کوچک و حرکت بزرگ متناظر باشند آنگاه نرخ وقوع نسبی حرکت‌های کوچک به بزرگ برابر

$$R(\lambda) := \frac{k(a)}{k((۱+\lambda)\, a)} = e^{Ma\lambda}(۱+\lambda)^{۱+Y}, \tag{۱۱.۲}$$

است. هرچه مقدار a کوچکتر باشد، افزایش پارامتر Y بیشترین تأثیر را بر افزایش نرخ وقوع حرکت‌های با اندازه کوچک تا رسیدن به حرکت با اندازه بزرگ دارد و مسیرهای نمونه‌ای فرآیند پیوسته‌تر می‌شوند. در نتیجه پیوسته‌تر شدن مسیرهای فرآیند CGMY، این مسیرها به مسیرهای پیوسته حرکت براونی شبیه‌تر می‌شوند. فرض پیوسته بودن مسیرهای فرآیند قیمت دارایی که با واقعیت بازار متناقض است، موجب ناکارآمدی حرکت براونی می‌شود و در این شرایط هرچه جایگزین ناپیوسته حرکت براونی، رفتاری پیوسته‌تر از خود نشان دهد انتخاب مناسب‌تری خواهد بود.

پارامتر C سرعت فرآیند CGMY را نشان می‌دهد. این پارامتر بطور مستقیم نرخ رویداد پرش‌هایی با بزرگای متفاوت را در مسیرهای فرآیند کنترل می‌کند. هرچه پارامتر C بزرگتر باشد تلاطم تلاطم مسیرهای فرآیند CGMY ساده بیشتر است و بالعکس. همچنین فرآیند CGMY با پارامتر C ثابت، دارای تلاطم تلاطم ثابت است. بنابراین، اگر منبع تصادف را در مدل تصادفی قیمت دارایی ریسکی دلخواه، فرآیند CGMY با پارامتر C ثابت در نظر بگیریم، تلاطم تلاطم قیمت دارایی را ثابت فرض کرده‌ایم. قیمت یک دارایی به عنوان یک متغیر تصادفی در مسیرهای خود در بازه‌های زمانی متفاوت، نرخ‌های رویداد پرش متفاوتی را تجربه می‌کند که بنابر شرایط بازار تعیین شده و تصادفی هستند. بنابراین فرض ثابت بودن پارامتر C با واقعیت بازار که شامل دوره‌هایی با تلاطم تلاطم متفاوت می‌شود در تضاد است. به جهت رفع این مشکل از فرآیند C^sGMY استفاده می‌کنیم که در آن پارامتر سرعت C، به کمک محرکی برآمده از خود فرآیند CGMY تصادفی می‌شود.

فرض کنیم V_L تغییرات مرتبه اول فرآیند CGMY با پارامتر C ثابت باشد. تغییرات مسیرهای فرآیند در جهت مثبت و منفی را به ترتیب با $V_{pL}(t)$ و $V_{nL}(t)$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V_{pL}(t) = \int_۰^t \int_۰^\infty x\mu_L(dx, ds), \tag{۱۲.۲}$$

$$V_{nL}(t) = \int_۰^t \int_{-\infty}^۰ x\mu_L(dx, ds). \tag{۱۳.۲}$$

فرآیندهای لوی $V_{pL}(t)$ و $V_{nL}(t)$ به ترتیب صعودی و نزولی هستند و به دلیل عدم رفتار یکنواخت پارامتر C بر مبنای مشاهدات بازار، این دو فرآیند انتخاب مناسبی برای محرک تصادفی سرعت نیستند. در راستای رفع این مشکل از نسخه تعدیل یافته کسری [۱۴] این فرآیندهای لوی که در [۲۶] و [۷] معرفی شدند، به عنوان محرک تصادفی سرعت استفاده می‌کنیم. اگر $\{L_t\}_{t\geq ۰}$ یک فرآیند لوی باشد فرآیند لوی تعدیل یافته کسری متناظر با آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$Y_L(t;\lambda,\delta) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^\delta x\mu_L(dx, ds), \tag{۱۴.۲}$$

که در آن λ و δ به ترتیب پارامترهای تعدیل و کسری هستند. طبق [۱۷]، فرآیند لوی $Y_L(t;\lambda,\delta)$ به ازای $\delta \in \mathbb{N}$ در دستگاه معادلات مارکفی $\delta + ۱$ بعدی زیر صدق می‌کند

$$\begin{aligned} dY_L &= \lambda(\alpha_۰(t) - Y_L)\, dt, \\ d\alpha_j &= \lambda(\alpha_{j+۱} - \alpha_j)dt, \quad j = ۰, \cdots, \delta - ۲, \\ d\alpha_{\delta-۱} &= -\lambda\alpha_{\delta-۱}dt + dL, \\ \alpha_j &= \frac{\delta(\delta-۱), \cdots, (\delta-j)}{\lambda^{j+۱}} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{\delta-j-۱}dL(s), \\ & \qquad\qquad j = ۰, \cdots, \delta - ۱, \end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

بنابراین فرآیند لوی تعدیل یافته کسری متناظر با فرآیندهای لوی $V_{pL}(t)$ و $V_{nL}(t)$ را به ترتیب با $Y_{pL}(t;\lambda_p,\delta_p)$ و $Y_{nL}(t;\lambda_n,\delta_n)$ نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه به دنبال جایگزینی مناسب برای حرکت براونی جهت مدل کردن منبع تصادف هستیم، با انتخاب $\delta_p =$

[۱۴] Tempered fractional

$\delta_n = ۲$ مسیرهای فرآیند $Y_L(t;\lambda,\delta)$ را به مسیرهای فرآیند حرکت براونی شبیه‌تر می‌کنیم. بنابراین $Y_{pL}(t)$ در دستگاه مارکفی ۳ بعدی زیر صدق می‌کند

$$\begin{aligned} dY_{pL}(t) &= \lambda_P\left(\alpha_{\circ p}(t) - Y_{pL}\right)dt, \\ d\alpha_{\circ p}(t) &= \lambda_P(\alpha_{۱p}(t) - \alpha_{\circ p}(t))dt, \\ d\alpha_{۱p}(t) &= -\lambda_P\alpha_{۱p}(t)dt + dV_{pL}(t), \end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

که در آن

$$\alpha_{\circ p}(t) = \frac{۲}{\lambda_P}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_P(t-s)}(t-s)dV_{pL}(s), \tag{۱۷.۲}$$

$$\alpha_{۱p}(t) = \frac{۲\times ۱}{\lambda_P}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)}dV_{pL}(s). \tag{۱۸.۲}$$

بطور مشابه می‌توان $Y_{nL}(t)$ را نیز به عنوان جواب دستگاه مارکفی ۳ بعدی مشابه تعریف کرد. از فرآیندهای لوی $Y_{pL}(t)$ و $Y_{nL}(t)$ به عنوان محرک تصادفی پارامتر سرعت استفاده می‌کنیم. پارامتر تصادفی C در فرآیند تعمیم یافته CGMY را ترکیب خطی از محرک‌های تصادفی معرفی شده به همراه پارامترهای ثابت c_p و c_n به ترتیب برای سرعت بخش مثبت و منفی چگالی لوی CGMY که به کمک تابع نشانگر در رابطه (۱۰.۲) مشخص شده‌اند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_p(t) := c_p + d_pY_{pL}(t) + e_pY_{nL}(t), \quad c_p, d_p, e_p > \circ, \tag{۱۹.۲}$$

$$C_n(t) := c_n + d_nY_{pL}(t) + e_nY_{nL}(t), \quad c_n, d_n, e_n > \circ. \tag{۲۰.۲}$$

با توجه به مثبت بودن ضرایب در روابط (۱۹.۲) و (۲۰.۲) و همچنین نحوه تعریف فرآیندهای $Y_{pL}(t)$ و $Y_{nL}(t)$ در روابط (۱۲.۲) و (۱۳.۲)، پارامتر تصادفی C در بخش‌های مثبت و منفی تابع چگالی فرآیند C^sGMY همواره مقداری مثبت است و در شرایط تعریف این تابع صدق می‌کند. در صورتی که منبع تصادف در بازار را فرآیند CGMY ساده فرض کنیم، استفاده از تغییرات تعدیل شده این فرآیند به عنوان منبع تصادف در پارامتر C موجب می‌شود این پارامتر دقیقا متناسب با رفتار تلاطم تلاطم بازار تغییر کند. چگالی لوی فرآیند C^sGMY را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} k_{X_t^{C^sGMY}}(x) = &\frac{(c_n + d_nY_{pL}(t) + e_nY_{nL}(t))}{|x|^{(۱+Y)}}e^{-G|x|}1_{x<\circ} + \\ &\frac{(c_p + d_pY_{pL}(t) + e_pY_{nL}(t))}{x^{(۱+Y)}}e^{-Mx}1_{x>\circ}. \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

فرآیند C^sGMY انتخاب بسیار مناسبی برای مدل کردن بخش تصادفی قیمت دارایی‌ها است. این فرآیند با در نظر گرفتن تغییرات تصادفی تلاطم قیمت در بازه‌های زمانی متفاوت، تلاطم تلاطم را تصادفی در نظر گرفته و مدل را به واقعیت موجود در بازار نزدیک‌تر می‌کند.

۳ معرفی مدل دارایی

در این بخش مدل تصادفی قیمت یک دارایی ریسکی را با توجه به محرک تصادفی معرفی شده در فصل قبل تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\{S_t\}_{t\geq\circ}$ فرآیند قیمت دارایی ریسکی و $\{X_t^{C^sGMY}\}_{t\geq\circ}$ فرآیند تصادفی C^sGMY باشد. در راستای به‌دست‌آوردن دینامیک قیمت دارایی ریسکی تحت این محرک جدید، ابتدا فرآیند $\{ln(S_t)\}_{t\geq\circ}$ را یک فرآیند لوی دلخواه فرض می‌کنیم. در مقاله حاضر، ابتدا، فرض می‌کنیم فرآیند $\{ln(S_t)\}_{t\geq\circ}$ فرآیند CGMY ساده باشد. پس از کالیبره کردن پارامترهای مدل با اطلاعات دارایی ریسکی، تغییرات این فرآیند کالیبره شده را به عنوان اندازه‌ای برای فعالیت های اقتصادی یا همان تغییرات مرتبه اول قیمت دارایی در نظر می‌گیریم. همانطور که در فصل قبل اشاره شد این تغییرات که در روابط (۱۲.۲) و (۱۳.۲) معرفی شدند به علت یکنوایی انتخاب مناسبی برای محرک تصادفی سرعت نیستند و به همین جهت فرآیندهای لوی تعدیل یافته کسری متناظر با آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Y_{pL}(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_p(t-s)}(t-s)^{\delta_p}x^{+}\mu_L(dx,ds), \tag{۱.۳}$$

$$Y_{nL}(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-s)}(t-s)^{\delta_n}x^{-}\mu_L(dx,ds). \tag{۲.۳}$$

در روابط فوق λ_p و λ_n به ترتیب پارامترهای تعدیل و δ_p و δ_n پارامترهای کسری سمت مثبت و منفی هستند. همچنین $x^+ = \max\{x, 0\}$، $x^- = \max\{-x, 0\}$ و $\mu_L(dx, ds)$ اندازه شدت متناظر با فرآیند $\{L_t\}_{t\geq 0}$ است که فرآیند CGMY ساده فرض شده بود. پس از محاسبه $Y_{pL}(t)$ و $Y_{nL}(t)$ به کمک روابط (۱.۳) و (۲.۳) فرآیند تصادفی $\left\{X_t^{C_t^sGMY}\right\}_{t\geq 0}$ را تعریف می‌کنیم. اندازه لوی متناظر با فرآیند لوی $\left\{X_t^{C_t^sGMY}\right\}_{t\geq 0}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\nu_{X_t^{C^sGMY}}(dx, dt) := \quad & k_{X_t^{C^sGMY}}(x)\, dxdt = \Big(\frac{\left(c_n+d_nY_{pL}(t)+e_nY_{nL}(t)\right)}{|x|^{(1+Y)}}e^{-G|x|}1_{x<0} \\ & +\frac{\left(c_p+d_pY_{pL}(t)+e_pY_{nL}(t)\right)}{x^{(1+Y)}}e^{-Mx}1_{x>0}\Big)dxdt. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

همچنین اندازه شدت متناظر با اندازه $\nu_{X_t^{C^sGMY}}$ را با $\mu_{X_t^{C^sGMY}}$ نشان می‌دهیم. اندازه شدت و اندازه لوی معرفی شده، متناظر با مسیرهای تحقق یافته فرآیندهای $Y_{pL}(t)$ و $Y_{nL}(t)$ تعریف می‌شوند بنابراین منطبق بر فرآیند تغییرات قیمت دارایی ریسکی هستند. چگونگی حرکت قیمت که در تغییرات مرتبه اول قیمت نمایان می‌شود، بهترین انتخاب برای محرک تصادفی سرعت است. با این انتخاب سرعت حرکت مطابق با تغییرات آن تصادفی می‌شود و الگوی حاصل به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود. فرض کنیم قیمت دارایی ریسکی تحت اندازه‌ی ریسک خنثی Q از رابطه زیر پیروی کند

$$S_t = S_0 \exp\left(rt + X_t^{C^sGMY}\right). \tag{۴.۳}$$

سه تایی مشخصه متناظر با $X_t^{C^sGMY}$ را تحت اندازه Q با $\left(A_{X_t^{C^sGMY}}, \nu_{X_t^{C^sGMY}}, \gamma_{X_t^{C^sGMY}}\right)$ نشان می‌دهیم. فرآیند $\tilde{S}_t$ که به صورت

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp(-rt)\exp\left(rt + \tilde{X}_t^{C^sGMY}\right) = S_0 \exp\left(\tilde{X}_t^{C^sGMY}\right), \tag{۵.۳}$$

تعریف می‌شود، تحت اندازه Q یک مارتینگل است. فرآیند $\tilde{X}_t^{C^sGMY}$، نسخه اصلاح شده [۱۵] فرآیند $X_t^{C^sGMY}$ تحت اندازه Q است که با فرض

$$\int_{|x|\geq 1} e^{2x}\nu_{X_t^{C^sGMY}}(dx) < \infty, \tag{۶.۳}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{X}_t^{C^sGMY} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)\left(\mu_{X_t^{C^sGMY}}(dx, ds) - \nu_{X_t^{C^sGMY}}(dx, ds)\right). \tag{۷.۳}$$

در نتیجه قیمت دارایی ریسکی تحت اندازه‌ی ریسک خنثی Q در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\tilde{X}_t^{C^sGMY} + \omega t\right), \tag{۸.۳}$$

که در آن ω عبارت تصحیح تحدب [۱۶] است. تصحیح تحدب نرخ رشد فرآیند قیمت تحت اندازه Q را کنترل می‌کند. قیمت مشتقات مالی تابعی مانند $\phi(.)$ از قیمت دارایی ریسکی $\tilde{S}_t$ است و قیمت‌گذاری مشتقات مالی ملزم به محاسبه امید ریاضی این تابع تحت اندازه واقعی، $E^P\left[\phi(\tilde{S}_t)\right]$ است که به آن قیمت آتی [۱۷] می‌گویند. اما به دلیل فرض نبود آربیتراژ، امید ریاضی تحت اندازه ریسک خنثی Q محاسبه و $E^Q\left[\phi(\tilde{S}_t)\right]$ یا قیمت سلف [۱۸] محاسبه می‌شود. عبارت تصحیح تحدب، با اصلاح تاثیرات غیر خطی واریانس و گشتاورهای مرتبه بالاتر،

[۱۵] Compensated
[۱۶] Convexity correction
[۱۷] Futures price
[۱۸] Forward price

این دو قیمت را به یکدیگر نزدیک و خاصیت مارتینگلی فرآیند قیمت را تحت اندازه ریسک خنثی Q حفظ می‌کند. در رابطه (۸.۳) عبارت تصحیح تحدب به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega = -\psi_{\tilde{X}_t^{C^sGMY}}(-i). \tag{۹.۳}$$

در رابطه فوق $\psi_{\tilde{X}_t^{C^sGMY}}$ نمای مشخصه فرآیند $\tilde{X}_t^{C^sGMY}$ است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\psi_{\tilde{X}_t^{C^sGMY}}(u) = \Gamma(Y)\Big[C_p\Big((M-iu)^Y - M^Y\Big) + C_n\Big((G+iu)^Y - G^Y\Big)\Big], \tag{۱۰.۳}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۹.۳) داریم

$$\omega = -\Gamma(Y)\Big[C_p\Big((M-۱)^Y - M^Y\Big) + C_n\Big((G+۱)^Y - G^Y\Big)\Big], \tag{۱۱.۳}$$

که در آن C_p و C_n به ترتیب در روابط (۱۹.۲) و (۲۰.۲) تعریف شده‌اند.
مدل قیمت‌گذاری بدست آمده در رابطه‌ی (۸.۳) از نوع مدل‌های نمایی لوی است که فرآیند لوی متناظر آن در شرط (۶.۳) صدق می‌کند و عبارت تصحیح تحدب متناظر آن نیز در رابطه‌ی (۱۱.۳) مشخص شده. بنابراین با توجه به اینکه فرآیند C^sGMY بکار رفته در این مدل در مفروضات لازم برای یک فرآیند لوی هنگام تعریف یک مدل نمایی لوی صدق می‌کند، می‌توان فرض مارتینگل بودن قیمت دارایی و متناهی بودن گشتاورهای آن را برقرار دانست [۱۳].
در بخش بعد به مقایسه نحوه حرکت فرآیند CGMY ساده و C^sGMY می‌پردازیم و روشی برای تخمین پارامترهای مدل بدست آمده در رابطه‌ی (۸.۳) معرفی می‌کنیم.

۴ پیاده‌سازی

در این بخش، ابتدا با استفاده از تابع مشخصه فرآیند CGMY، پارامترهای مدل را تخمین می‌زنیم. در ادامه به بررسی مسیرهای فرآیند C^sGMY و شبیه‌سازی آن‌ها می‌پردازیم. در راستای این شبیه‌سازی ابتدا مسیرهای فرآیند CGMY ساده را رسم و سپس به کمک آن‌ها مسیرهای فرآیند C^sGMY را نمایش داده و بررسی می‌کنیم. در نهایت نشان می‌دهیم که در داده های واقعی، تلاطم تلاطم تصادفی می‌باشد اما مدل CGMY قادر به نمایش این پدیده نیست در حالی که مدل ساخته شده با فرآیند C^sGMY این پدیده را نشان می‌دهد. علاوه بر این با مقایسه رفتار دم توزیع در فرآیند معرفی شده با فرآیند CGMY ، توانایی فرآیند جدید را در تعدیل نرخ زوال دم توزیع بررسی می‌کنیم.

۱.۴ تخمین پارامتر

ساختاری دو مرحله‌ای برای تخمین پارامترهای مدل CGMY تعمیم یافته در نظر می‌گیریم. ابتدا پارامترهای مدل CGMY را استخراج کرده و سپس با استفاده از آنها، به تخمین پارامترهای دستگاه مارکفی وابسته می‌پردازیم.
مرحله اول- تخمین پارامترهای مدل CGMY
مدل CGMY شامل چهار پارامتر اصلی C، G، M و Y است که هرکدام نقش مهمی در رفتار مدل دارند. هدف از این مرحله، تخمین دقیق این پارامترها است تا مدل رفتار واقعی بازار را به‌طور بهینه شبیه‌سازی کند. برای تخمین این پارامترها، بازده‌های لگاریتمی روزانه شاخص S&P500 را در بازه ۲۰۱۸ تا ۲۰۲۳ از طریق API پلتفرم Yahoo Finance گردآوری کردیم. باتوجه به اینکه تابع مشخصه تحلیلی مدل CGMY را در اختیار داریم، آن را با تابع مشخصه تجربی تطبیق داده تا پارامترهای مدل را برآورد کنیم. تابع مشخصه تجربی به‌طور مستقیم از بازده‌های لگاریتمی بدست می‌آید و برای تخمین پارامترهای مدل از روش‌های عددی مانند شبیه‌سازی مونت‌کارلو یا روش‌های بهینه‌سازی استفاده می‌کنیم. تابع مشخصه تجربی کمک می‌کند تا فرآیند CGMY دقیق‌تر با داده‌های واقعی تطبیق داده شود. تابع مشخصه یک متغیر تصادفی X، تابعی از پارامتر فرکانسی $u \in \mathbb{R}$، است که $\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]$ و در آن i واحد موهومی و $\mathbb{E}[\cdot]$ امید ریاضی است. تابع مشخصه معادل تبدیل فوریه‌ی تابع چگالی احتمال متغیر X است و در نتیجه، حاوی کلیه اطلاعات آماری آن می‌باشد. حال با در اختیار داشتن نمونه‌ای با تعداد دلخواه N، از مشاهدات بازده لگاریتمی دارایی در فواصل زمانی مساوی مانند $\{r_۱, r_۲, \ldots, r_N\}$ می‌توان تقریب تجربی تابع مشخصه را به‌صورت زیر محاسبه نمود

$$\hat{\varphi}_N(u) = \frac{۱}{N}\sum_{j=۱}^{N} e^{iur_j}. \tag{۱.۴}$$

این تخمین، در واقع تقریب مونت‌کارلویی از مقدار واقعی $\varphi_X(u)$ است. مقدار $\hat{\varphi}_N(u)$ عددی مختلط خواهد بود و می‌توان آن را به‌صورت زیر نیز نمایش داد

$$\hat{\varphi}_N(u) = a(u) + ib(u), \tag{۲.۴}$$

که در آن:

$$a(u) = \frac{۱}{N}\sum_{j=۱}^{N}\cos(ur_j), \quad b(u) = \frac{۱}{N}\sum_{j=۱}^{N}\sin(ur_j). \tag{۳.۴}$$

در نتیجه، در پیاده‌سازی عددی، می‌توان قسمت حقیقی و موهومی را جداگانه محاسبه کرد، بدون آن‌که به محاسبات صریح با اعداد مختلط نیازی باشد. اما نکته ای که وجود دارد، برای انجام مقایسه بین تابع مشخصه تجربی و تحلیلی، تابع تجربی در مجموعه‌ای از نقاط گسسته $\{u_۱, u_۲, ..., u_K\} \subset \mathbb{R}$ محاسبه می‌شود. بنابراین انتخاب مناسب این نقاط نقش کلیدی در عملکرد برآوردگر دارد. معمولاً این نقاط به‌صورت یکنواخت از بازه‌ای متقارن حول صفر برای مثال $[-۵۰, ۵۰]$ انتخاب می‌شوند.
برای فرآیند CGMY، تابع مشخصه تحلیلی در بازده زمانی Δt به‌صورت بسته قابل بیان است بنابراین با فرض نرمال‌سازی و با استفاده از فرم تحلیلی، مقدار تابع مشخصه تحلیلی در هر نقطه u به‌صورت زیر قابل محاسبه است

$$\varphi_{CGMY}(u;\theta) = \exp\left\{\Delta t \cdot \left[C\Gamma(-Y)\left((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y\right)\right]\right\}, \tag{۴.۴}$$

که در آن بردار $\theta = [C, G, M, Y]$ حاوی پارامترهای مدل CGMY می‌باشد. بنابراین برای تخمین بردار پارامتری θ، مقدار تابع مشخصه تجربی و تحلیلی را در هر نقطه u_k محاسبه می‌کنیم و با کمینه کردن تابع زیان مربعات وزن‌دار

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=۱}^{K} w_k\left(\hat{\varphi}_N(u_k) - \varphi_{CGMY}(u_k;\theta)\right)^۲, \tag{۵.۴}$$

که به صورت جمع مربع اختلافات تابع مشخصه تجربی و تحلیلی در هر نقطه u_k به همراه وزن مربوطه w_k می‌باشد، پارامترهای مدل CGMY را تخمین می‌زنیم.
مرحله دوم- تخمین پارامترهای دستگاه مارکفی
پس از برآورد موفق پارامترهای فرآیند CGMY، گام بعدی تخمین پارامترهای دستگاه مارکفی است. در این مرحله، پارامترهای C، G، M و Y که در مرحله اول از طریق تابع مشخصه تخمین زده شدند، به‌عنوان داده ورودی معلوم در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین هدف، برآورد بردار پارامترهای مارکفی است که شامل مؤلفه‌های زیر می‌شود

$$\theta_{\text{Markov}} = \{\lambda_p, \lambda_n, \alpha_{\circ p}(\circ), \alpha_{\circ n}(\circ), Y_p(\circ), Y_n(\circ), c_p, d_p, e_p, b_p, c_n, d_n, e_n, b_n\}. \tag{۶.۴}$$

از این رو فرآیندCGMY تعمیم یافته با پارامترهای معین CGMY و پارامترهای آزاد مارکفی شبیه سازی می‌شود تا سری زمانی شبیه‌سازی‌شده $S_i(\theta)$ تولید گردد. سپس، با کمینه کردن تابع زیان مربعات

$$\mathcal{M}(\theta_{\text{Markov}}) = \sum_{i=۱}^{N}\left(\log S_i^{\text{obs}} - \log S_i(\theta_{\text{Markov}})\right)^۲, \tag{۷.۴}$$

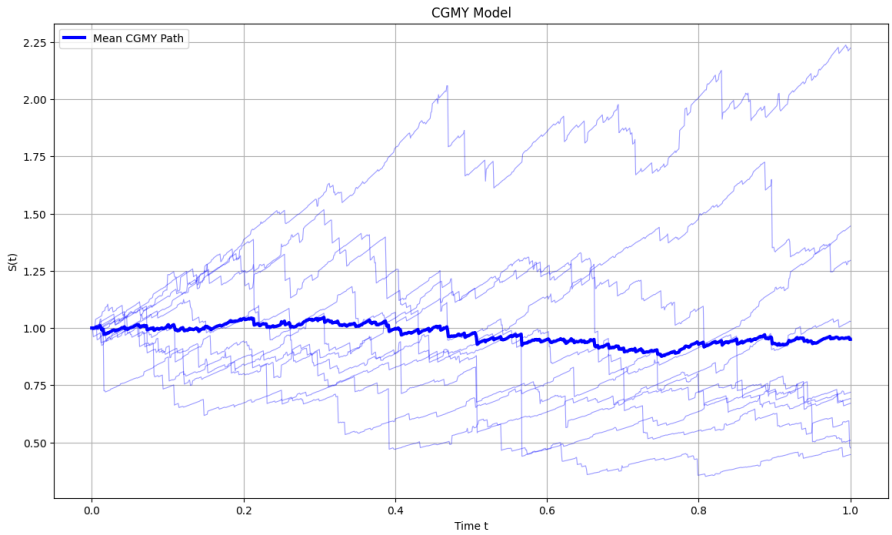
که S_i^{obs} قیمت واقعی مشاهده‌شده در زمان t_i و $S_i(\theta_{\text{Markov}})$ مقدار خروجی مدل در زمان t_i می‌باشد، بردار پارامتر مارکفی را تخمین می‌زنیم. به‌منظور بهینه‌سازی تابع زیان و یافتن بهترین مقدار پارامترها، از روش‌های بهینه‌سازی L-BFGS-B در کتابخانه scipy.optimize پایتون استفاده می‌کنیم. برای افزایش احتمال همگرایی به کمینه سراسری، بهینه‌سازی فوق را با مقداردهی اولیه تصادفی چندین بار اجرا می‌کنیم.

۲.۴ شبیه‌سازی مسیرهای C^sGMY

برای شبیه‌سازی، دو روش قابل توجه عبارت‌اند از: تبدیل فوریه سریع [۱۹] و روش تخمین پرش‌های بزرگ [۲۰].

[۱۹] Fast Fourier transform (FFT)
[۲۰] Large jump approximation

در روش تبدیل فوریه سریع، ابتدا تابع مشخصه CGMY محاسبه شده و سپس با استفاده از تبدیل فوریه معکوس، تابع چگالی احتمال مسیرهای این فرآیند به‌دست می‌آید. این رویکرد به‌ویژه برای شبیه‌سازی سریع مسیرهای فرآیند CGMY کاربرد دارد و به دلیل محاسبه سریع تبدیل فوریه، زمان اجرای کمتری نسبت به روش پرش‌های بزرگ دارد. در این روش، پس از محاسبه تابع چگالی، از آن برای نمونه‌گیری مسیرهای تصادفی استفاده می‌شود. اما یکی از چالش‌های این روش، تنظیم دقیق پارامترهای FFT است که برای دقت بالاتر نیاز به انتخاب اندازه‌های مناسب برای شبکه و گام زمانی dt دارد، بنابراین روش تخمین پرش‌های بزرگ را انتخاب می‌کنیم.
در روش تخمین پرش‌های بزرگ، ابتدا پرش‌های بزرگ‌تر از آستانه‌ای خاص مانند ϵ شبیه‌سازی می‌شوند. این پرش‌ها با استفاده از توزیع‌های نمایی با نرخ‌های G و M تولید می‌شوند. به‌طور کلی، در این چارچوب از یک فرآیند پواسون مرکب استفاده می‌شود که در آن تعداد پرش‌ها در یک گام زمانی dt به‌طور تصادفی و بر اساس پارامترهای مدل تعیین می‌شود. این روش به دلیل استفاده از فرآیندهای پواسون و شبیه‌سازی ساده، بسیار کارآمد است. در این روش، سرعت شبیه‌سازی به پارامتر ϵ بستگی دارد و هرچه مقدار آن کوچک‌تر باشد، دقت شبیه‌سازی بالاتر خواهد بود.
برای بررسی رفتار دینامیکی فرآیند $X_t^{C^sGMY}$ بازه‌ی زمانی $[0, T]$ را به N گام بافواصل مساوی افراز می‌کنیم. سپس فرآیند CGMY را با استفاده از روش پرش‌های بزرگ شبیه‌سازی می‌کنیم. نکته مهم در این گام این است که نرخ پرش‌های مثبت و منفی از طریق انتگرال‌گیری عددی از چگالی پرش‌ها محاسبه می‌شود و در هر گام زمانی، تعداد پرش‌ها از توزیع پواسون و مقادیر آن‌ها با روش پذیرش و رد از توزیع نمایی انتخاب می‌شوند. در راستای مقایسه نحوه تغییرات فرآیندهای CGMY و C^sGMY، مسیرها و میانگین مسیرهای نمونه‌ای این فرآیندها را به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش می‌دهیم.

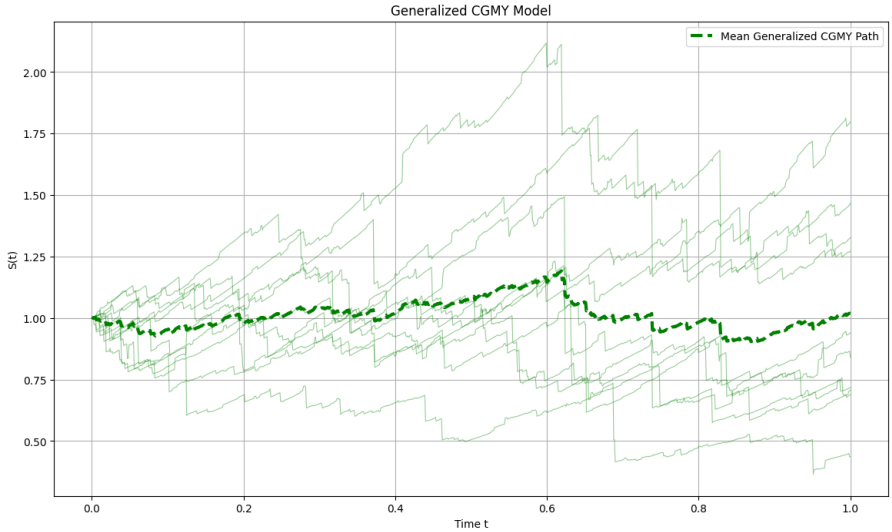


شکل ۱: مسیرها و میانگین مسیرهای نمونه‌ای فرآیند CGMY

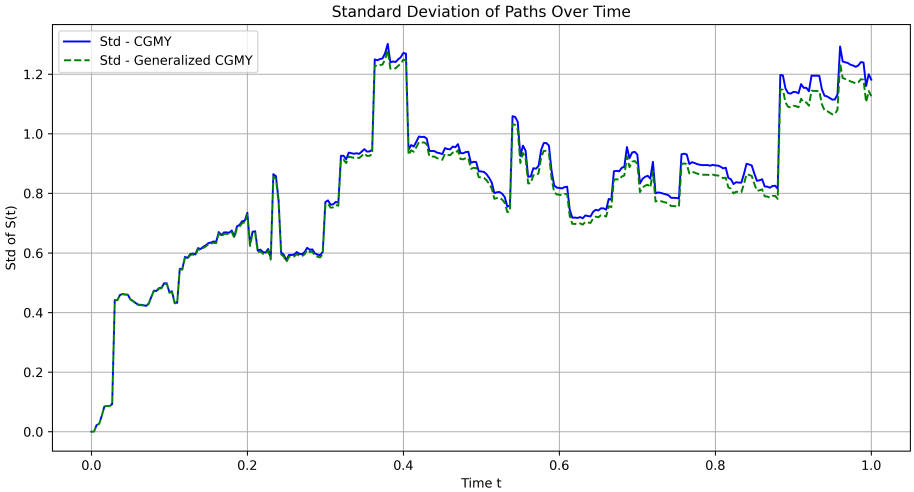
در گام بعدی، دستگاه مارکفی (۱۶.۲) را برای پرش‌های مثبت و منفی به کمک رویکرد گسسته سازی زمانی شبیه‌سازی میکنیم. سپس با استفاده از مسیرهای حاصل از فرآیند CGMY و متغیرهای Y_{pL} و Y_{nL} که خروجی شبیه‌سازی سیستم‌های مارکفی هستند، تابع تصحیح لگاریتمی مدل محاسبه می‌شود. این تابع، تأثیر تلاطم ناشی از پرش‌ها را در قالب یک اصطلاح تعدیل‌کننده لگاریتمی به مسیر اصلی اضافه می‌کند. مسیر نهایی فرآیند نیز از طریق نمایی‌سازی ترکیب فرآیند CGMY و تابع تصحیح حاصل می‌شود. با توجه به روش فوق، مسیرها و میانگین مسیرهای نمونه‌ای C^sGMY را در شکل ۲ نمایش می‌دهیم. در مسیرهای فرآیند تصادفی CGMY ساده، پرش‌ها بلندتر هستند اما در فرآیند C^sGMY پرش‌ها تعدیل‌یافته‌تر و مسیرها هموارتر هستند که در شکل ۳ قابل مشاهده است.

۳.۴ مقایسه دم توزیع فرآیندهای $CGMY$ با C^sGMY

با توجه به ماهیت غیرنرمال داده‌های بازارهای مالی، مانند قیمت تصادفی سهم، شاخص‌های آماری مانند میانگین و واریانس برای مدلسازی رویدادهای نادر اما با نوسان زیاد کافی نیستند. توجه به این واقعیت در کنار اهمیت فراوان رفتار مدل قیمت‌گذاری در دم‌های توزیع حین مدلسازی قیمت دارایی پایه‌ی طیف وسیعی از مشتقات مالی، تمرکز پژوهشگران را بر تحلیل صدک‌های انتهایی این توزیع‌ها قرار داده است. در این بخش با استفاده از شبیه‌سای مونت کارلو، به مقایسه توانایی ساختاری فرآیندهای CGMY با فرآیند C^sGMY در مدلسازی حرکت‌های با نوسان زیاد و گاه به گاه قیمت دارایی ریسکی مانند سهام می‌پردازیم. برای ارزیابی کارایی فرایند معرفی شده C^sGMY با فرایند کلاسیک CGMY از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با حجم نمونه ۱۰,۰۰۰ و تعداد گام‌های زمانی $N = ۱۰۰۰$ استفاده می‌کنیم. با



شکل ۲: مسیرها و میانگین مسیرهای نمونه ای فرآیند C^sGMY



شکل ۳: مقایسه مسیرهای فرآیند C^sGMY با فرآیند CGMY

معرفی نرخ R_p بصورت

$$R_p = \frac{Q_p(CsGMY)}{Q_p(CGMY)},$$

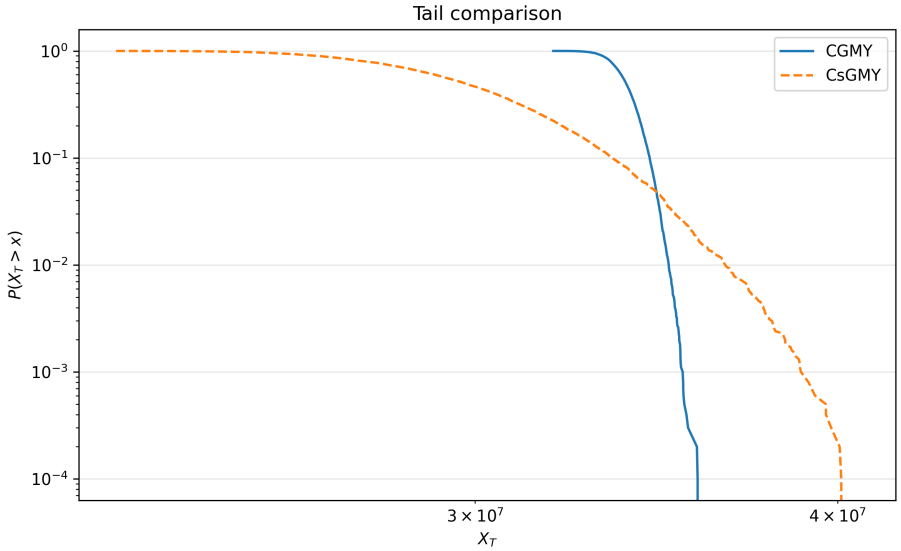
که در آن Q_p مقدار صدک pام است رفتار دم توزیع‌های دو فرایند را مقایسه می‌کنیم. با استفاده از روش بوت استرپ که شامل نمونه‌گیری تصادفی و جایگزینی داده‌های تولید شده از مسیرهای فرآیندها می‌شود، عدم تصادفی بودن نتایج بدست آمده را بررسی می‌کنیم. جدول ۱ نسبت‌های صدک‌های ۹۹ درصد، ۹۹/۵ درصد و ۹۹/۹ درصد فرایند C^sGMY را نسبت به فرآیند CGMY نشان می‌دهد.

جدول ۱: مقایسه درصدک‌های انتهایی و بازه‌های اطمینان بوت‌استرپ

صدک (p)	نسبت مشاهده‌شده	میانگین بوت‌استرپ	انحراف معیار بوت‌استرپ	تفسیر اقتصادی
($p = ۰/۹۹$)	۱/۰۴۶	۱/۰۴۶	۰/۰۰۳	افزایش ۴/۶ در ریسک نسبی
($p = ۰/۹۹۵$)	۱/۰۶۷	۱/۰۶۷	۰/۰۰۵	افزایش ۶/۷ در ریسک نسبی
($p = ۰/۹۹۹$)	۱/۰۹۸	۱/۱۰۱	۰/۰۰۸	افزایش ۱۰/۱ در ریسک نسبی

هر نسبت بزرگتر از واحد نشان‌دهنده آن است که فرآیند C^sGMY مقادیر دم بزرگتری را نسبت به فرآیند CGMY تولید می‌کند.

در شکل ۴ کاهش سرعت نرخ زوال دم‌های توزیع در فرآیند C^sGMY مشهود است. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، فرآیند



شکل ۴: مقایسه نرخ زوال دم‌های توزیع در فرایندهای C^sGMY و CGMY

C^sGMY بطور مستمر و معنادار مقادیر صدک‌های بالاتری را نسبت به فرآیند CGMY تولید می‌کند. این پدیده نشان‌دهنده‌ی سنگین‌تر بودن دنباله‌های توزیع در فرایند C^sGMY یا به عبارت دیگر، وقوع جهش‌های شدید اما با تعداد و بزرگای کمتر در مسیرهای فرایند C^sGMY بیشتر از فرآیند CGMY است. برای اطمینان از اینکه تفاوت مشاهده‌شده تصادفی نیست، از روش بوت‌استرپ با ۲۰۰ تکرار استفاده می‌کنیم. نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که میانگین نسبت‌های بوت‌استرپ بسیار نزدیک به نسبت‌های مشاهده‌شده است و انحراف معیار بسیار کوچک (کمتر از ۰/۰۱) نشان‌دهنده‌ی پایداری و همگرایی سریع نتایج است. با توجه به نتایج بدست آمده در این بخش، نادیده گرفتن سرعت تصادفی در فرآیند CGMY منجر به کم‌برآوردی ریسک در سطوح بالای اطمینان می‌شود. فرآیند C^sGMY با رفع این نقص، تصویر واقع‌بینانه‌تری از پتانسیل ریزش‌های شدید بازار ارائه می‌دهد و علاوه بر این تنوع بیشتری در تعداد و بزرگای پرش‌های احتمالی در قیمت را در مدل می‌گنجاند. بنابراین، برای قیمت‌گذاری اختیارهای غیرساده به ویژه اختیارهای حساس به رفتار دم توزیع قیمت دارایی پایه، مدیریت سرمایه و محاسبه سرمایه در معرض خطر VaR، در سطوح بالای ریسک، فرایند C^sGMY برتری قابل توجهی در مدلسازی دارد.

۴.۴ آزمون ARCH جهت بررسی وجود تلاطم تلاطم تصادفی

همانطور که از ابتدا اشاره شد، داده های واقعی دارای تلاطم تلاطم تصادفی می‌باشند. برای بررسی وجود چنین ساختاری، از آزمون ARCH معرفی‌شده توسط [۱۸] استفاده می‌کنیم. بنابر این آزمون فرض آماری، اگر ε_t باقی‌مانده‌های حاصل از یک مدل رگرسیون باشد در این صورت آن را می‌توان از طریق رگرسیون به صورت زیر تقریب زد

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 + u_t, \tag{۸.۴}$$

که در آن q مرتبه آزمون و u_t جمله خطای نوفه سفید است. بنابراین فرضیات آزمون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0,$$
$$H_1 : \exists\, \alpha_i \neq 0,$$

که پذیرش فرض صفر معادل عدم وجود اثر تلاطم تلاطم تصادفی است. تلاطم داده‌های قیمت شاخص S&P500 را در بازه زمانی ۲۰۱۸ تا ۲۰۲۳ محاسبه و از آن برای انجام آزمون استفاده می‌کنیم. در واقع $Var(\varepsilon_t)$ در اینجا نمایانگر تلاطم تلاطم می باشد. در ادامه از آماره آزمون ضریب لاگرانژ $\mathrm{LM} = T \cdot R^2$ استفاده می‌کنیم که در آن T تعداد مشاهدات و R^2 ضریب تعیین رگرسیون فوق است. تحت فرض صفر، این آماره از توزیع کای‌دو با درجه آزادی q یعنی ($\mathrm{LM} \sim \chi^2(q)$) پیروی می‌کند. این عملیات را با استفاده از تابع het_arch از بسته‌ی statsmodels در زبان برنامه نویسی پایتون پیاده‌سازی و نتایج را در جدول ۲ ارائه کرده‌ایم.

جدول ۲: نتایج آزمون

	مقدار **p-value**
داده‌های واقعی بازار	$۱۰^{-۹}$
فرآیند C^sGMY	۰٫۰۰۲
فرآیند CGMY	۰٫۹

با توجه به مقدار p-value به‌دست‌آمده با سطح اطمینان ۵ درصد، فرض صفر آزمون یعنی عدم وجود اثر تلاطم تلاطم تصادفی رد می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این اثر در بازار و مدل C^sGMY برخلاف مدل CGMY وجود دارد.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در این مقاله، فرآیند CGMY تعمیم‌یافته به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدل‌سازی قیمت دارایی‌های مالی با در نظر گرفتن ویژگی‌های داده‌های تجربی بازار ارائه شد. با توجه به پارامترهای اصلی مدل و بررسی داده‌های واقعی مرتبط، توانستیم به تخمین پارامترهای مدل بپردازیم و اثربخشی آن را در تحلیل رفتار قیمت‌ها نشان دهیم. نتایج حاصل از آزمون‌های آماری، فرآیند C^sGMY را در توصیف ویژگی‌های پیچیده‌تر بازارهای مالی تأیید کرد. از این ویژگی‌ها می‌توان به وجود تلاطم تلاطم تصادفی اشاره کرد. با توجه به مفروضات و انعطاف پذیری فرآیند C^sGMY، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی به کاربردهای عملی‌تر این مدل در قیمت‌گذاری مشتقات مالی و مدیریت ریسک پرداخته شود.

فهرست منابع

[۱] مهردوست، فرشید، صابر، نغمه ۱۳۹۳. قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش. مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، ۲(۳)، صص ۴۵-۶۰.

[2] Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z. (1997) 'Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models', *Journal of Finance, American Finance Association*, 52(5), pp. 2003–2049. doi: 10.1111/j.1540-6261.1997.tb02749.x.

[3] Barndorff-Nielsen, O.E. and Shephard, N. (2001) 'Non–Gaussian Ornstein–Uhlenbeck–Based Models and Some of their Uses in Financial Economics', *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 63, pp. 167–241. doi: 10.1111/1467-9868.00282.

[4] Barndorff-Nielsen, O.E. and Shephard, N. (2002) 'Econometric Analysis of Realised Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models', *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 64, pp. 253–280. doi: 10.1111/1467-9868.00336.

[5] Barndorff-Nielsen, O.E. and Veraart, A.E.D. (2013) 'Stochastic Volatility of Volatility and Variance Risk Premia', *Journal of Financial Econometrics*, 11(1), pp. 1–46. doi: 10.2139/ssrn.1973121.

[6] Black, F. and Scholes, M. (1973) 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *Journal of Political Economy*, 81(3), pp. 637–659. doi: 10.1086/260062.

[7] Boniece, B.C., Didier, G. and Sabzikar, F. (2020) 'On Fractional Lévy Processes: Tempering, Sample Path Properties and Stochastic Integration', *Journal of Statistical Physics*, 4, pp. 954–985. doi: 10.1007/s10955-019-02475-1.

[8] Brigo, D. and Mercurio, F. (2002) 'Lognormal-mixture dynamics and calibration to market volatility smiles', *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 5(4), pp. 427–446. doi: 10.1142/S0219024902001511.

[9] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B. and Yor, M. (2002) 'The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation', *The Journal of Business*, 75(2), pp. 305–332. doi: 10.1086/338705.

[10] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B. and Yor, M. (2003) 'Stochastic Volatility for Lévy Processes', *Mathematical Finance*, 13(3), pp. 345–382. doi: 10.1111/1467-9965.00020.

[11] Chong, C.H. and Todorov, V. (2024) 'Volatility of Volatility and Leverage Effect from Options', *Journal of Econometrics*, 240(1), 105669. doi: 10.1016/j.jeconom.2024.105669.

[12] Cont, R. (2007) 'Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models', in Teyssière, G. and Kirman, A.P. (eds.) *Long Memory in Economics*. Springer. doi: 10.1007/978-3-540-34625-8-10.

[13] Cont, R. and Tankov, P. (2003) *Financial Modelling with Jump Processes*. 1st edn. Chapman and Hall/CRC. doi: 10.1201/9780203485217.

[14] Derman, E. and Kani, I. (1994) 'Riding on a Smile', *Risk*, 7(2), pp. 32–39. Available at: https://www.researchgate.net/publication/239059413_Riding_on_a_Smile.

[15] Dupire, B. (1994) 'Pricing with a Smile', *Risk*, 7(1), pp. 18–20. Available at: https://www.risk.net/derivatives/equity-derivatives/1500211/pricing-with-a-smile.

[16] Eberlein, E. and Raible, S. (2001) 'Term Structure Models Driven by General Lévy Processes', *Mathematical Finance*, 9(1), pp. 31–52. doi: 10.1111/1467-9965.00062.

[17] Elliott, R., Madan, D.B. and Wang, K. (2022) 'High dimensional Markovian trading of a single stock', *Frontiers of Mathematical Finance*, 1(3), pp. 375–396. doi: 10.3934/fmf.2022001.

[18] Engle, R.F. (1982) 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation', *Econometrica*, 50(4), pp. 987–1007. doi: 10.2307/1912773.

[19] Gatheral, J., Jaisson, T. and Rosenbaum, M. (2018) 'Volatility is Rough', *Quantitative Finance*, 18(6), pp. 933–949. doi: 10.1080/14697688.2017.1393551.

[20] Ghateral, J. (2006) *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley.

[21] Heston, S. (1993) 'A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options', *The Review of Financial Studies*, 6(2), pp. 327–343. doi: 10.1093/rfs/6.2.327.

[22] Huang, D. et al. (2019) 'Volatility-of-Volatility Risk', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 54(6), pp. 2423–2452. doi: 10.1017/S0022109018001436.

[23] Hull, J. and White, A. (1987) 'The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities', *The Journal of Finance*, 42(2), pp. 281–300. doi: 10.2307/2328253.

[24] Kawai, R. (2009) 'A Multivariate Lévy Process Model with Linear Correlation', *Quantitative Finance*, 9(5), pp. 597–606. doi: 10.1080/14697680902744729.

[25] Lipton, A. (2002) 'The Vol Smile Problem', *Risk*, 15(2), pp. 61–65. Available at: https://www.risk.net/derivatives/equity-derivatives/1530435/vol-smile-problem.

[26] Madan, D.B. and Wang, K. (2022a) 'Stationary increments reverting to a Tempered Fractional Lévy Process (TFLP)', *Quantitative Finance*, 22, pp. 1391–1404. doi: 10.1080/14697688.2022.2060852.

[27] Madan, D.B. and Wang, K. (2025) 'Unmasking Stochastic Volatility in Discontinuous Continuity Approximations and Extracting VIX Optionality Directly from SPX Implied Volatilities', *Frontiers of Mathematical Finance*, 4, pp. 1–24. doi: 10.3934/fmf.2024010.

[28] Papanicolaou, G. and Sircar, K.R. (1999) 'Mean-Reverting Stochastic Volatility', *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(1), pp. 101–142. doi: 10.1142/S0219024900000061.

[29] Poon, S.-H. and Granger, C.W.J. (2003) 'Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review', *Journal of Economic Literature*, 41(2), pp. 478–539. doi: 10.1257/002205103765762743.

[30] Stein, E.M. and Stein, J.C. (1991) 'Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach', *The Review of Financial Studies*, 4(4), pp. 727–752. doi: 10.1093/rfs/4.4.727.

[31] Yalincak, O.H. (2012) 'Criticism of the Black-Scholes Model: But Why is It Still Used? (The Answer is Simpler than the Formula)', *SSRN Electronic Journal*. doi: 10.2139/ssrn.2115141.

Asset price modeling using generalized CGMY process driven by first order variation

Navideh Modarresi(1) [21], Parsa Yahyavi(1), Reza Kazemi(1), Samane Kazemi(1), Alireza Mousavi(1),

(1) Faculty of Statistics, Mathematics, and Computer, Allame Tabatabai University, Tehran, Iran

Communicated by: Firouze Rivaz

Received: 28 Julay 2025 Accepted: 10 May 2026

Abstract: Some important features of the underlying asset price process paths have been overlooked in classical derivative pricing models. In these models, three fundamental aspects of the stochastic movement of price namely speed, scale, and degree of continuity are not distinguishable. These characteristics are particularly inseparable in models where the source of randomness is defined by Brownian motion, whereas these concepts are essential for a precise analysis of how asset prices move. To address this limitation, we abandon the assumption of path continuity and instead use discontinuous approximations that allow for the distinction between these three aspects. In this regard, we employ the generalized CGMY process, C^sGMY. In this process, the parameter C represents speed and is modeled stochastically. With a new approach, we consider first-order variations as the driving force of the model, which enables the modeling of stochastic volatility of volatility. Subsequently, we estimate the parameters of the proposed model using a two-step procedure. In the first step, the parameters of the CGMY process are estimated using its characteristic function. The second step involves estimating the parameters introduced during the construction of the C^sGMY process. After determining all parameters, we simulate sample paths of the new process and compare them with those of the original CGMY process. We simulate the C^sGMY process using the large jump approximation method. In this approach, the arrival rate of large jumps is modeled by a Poisson process, and the sizes of these jumps follow an exponential distribution. Finally, using the *ARCH* test, we confirm the presence of stochastic volatility of volatility in historical price data and the new process.

Keywords: CGMY Lévy process, stochastic volatility of volatility, stochastic speed.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[21] Corresponding author

E-mail addresses: (N.Modarresi) n.modarresi@atu.ac.ir, (P.Yahyavi) p_yahyavi@atu.ac.ir , (R.Kazemi) rkazemi453@gmail.com, (S.kazemi) S.kazemi40@atu.ac.ir, (A.Mousavi) Ar.mousavie@gmail.com